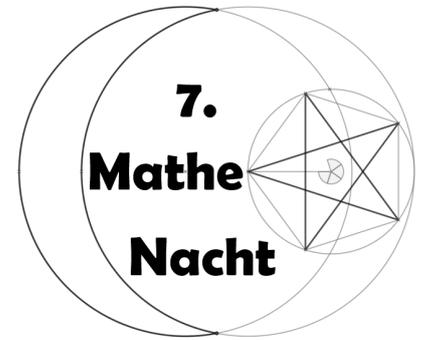


Grundlagen



Vollständige Induktion

1. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

2. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $2n^2 > 4n + 1$, für welche gilt sie nicht?
3. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $m^3 - m$ ist ohne Rest durch 3 teilbar.
4. Sei (G, \circ) eine Gruppe. Zeige, dass dann der Durchschnitt von n Untergruppen von G ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

Relationen

5. Was ist eine Äquivalenzrelation, was ist eine Ordnungsrelation? Nenne alle Eigenschaften!
6. Sei $A := \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge. Wie viele unterschiedliche Relationen existieren auf A ? Gib eine Relation auf A explizit an, die
 - i) reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.
 - ii) weder symmetrisch, noch antisymmetrisch ist.
 - iii) transitiv und reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.
7. Sei eine Relation \sim gegeben auf \mathbb{Z} wie folgt:

Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ gerade ist.

Zeige, dass durch \sim eine Äquivalenzrelation definiert wird.
Beschreibe die Äquivalenzklasse $[0]$.

8. Seien (G, \circ) eine Gruppe und

$$R := \{(a, b) \in G \times G \mid \text{Es existiert ein } g \in G \text{ mit der Eigenschaft } b = g^{-1} \circ a \circ g\}$$

Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Schreibe $[e]$ explizit hin. (e ist das neutrale Element der Gruppe.)

9. Seien M eine beliebige Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Seien außerdem $x, y \in M$ und es gelte $[x] \neq [y]$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründe.

Es existiert ein $m \in M$ so, dass $m \in [x] \cap [y]$.

Komplexe Zahlen

10. Stelle folgende komplexe Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar!

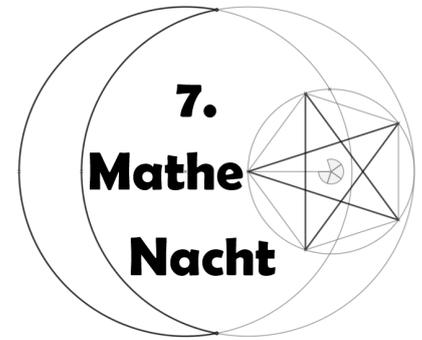
(a) $\frac{3 - i}{2i + 1}$

(b) $(1 - i)(3 + 2i)$

(c) $(-i)^5$

(d) $\overline{(3 - i)^2}$

11. Bestimme alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt: $z + \bar{z} = 10$.



Abbildungen und Homomorphismen

1. Es seien f und g Abbildungen von \mathbb{Z} nach \mathbb{Z} gegeben wie folgt:

Für alle $a \in \mathbb{Z}$ sei $f(a) := -a^2$ und $g(a) := a - 2$.

- (a) Gilt $f \circ g = g \circ f$? Beweise oder widerlege!
 - (b) Gib die Urbildmenge für die Zahl -1 unter f an! Gib auch die Urbildmenge für die Zahl -1 unter $g \circ f$ an!
 - (c) Ist g bijektiv? Beweise oder widerlege!
 - (d) Ist f injektiv? Beweise oder widerlege!
2. Gib jeweils eine Abbildung f an, die
- (a) von \mathbb{Q} nach \mathbb{Z} abbildet und nicht surjektiv ist.
 - (b) von \mathbb{N} nach \mathbb{N} abbildet und für die gilt: $f(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) von \mathbb{Z} nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abbildet und für die gilt: $(1, 1)$ liegt im Bild, aber $(0, 0)$ nicht.
3. Gegeben sei die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der komponentenweisen Addition. Weiter seien $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Abbildungen gegeben wie folgt:

Für alle $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei

$$f(x, y) = (x, -y)$$

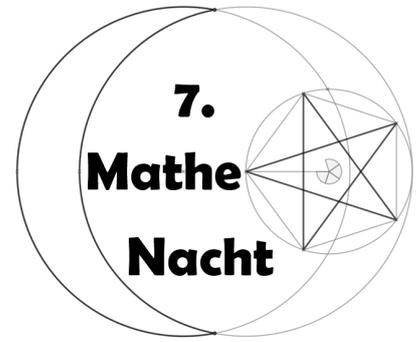
$$g(x, y) = (y, 2x)$$

- (a) Prüfe, ob die Elemente $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ im Bild von f oder g liegen!
 - (b) Bestimme alle Elemente $v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, für die gilt: $f(v) = g(v)$.
 - (c) Bestimme $\text{Bild}(f) \cap \text{Bild}(g)$!
 - (d) Ist g ein Gruppen-Homomorphismus von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Beweise oder widerlege!
4. Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}^2$ und die Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow V$ mit:

$$\alpha(z) := (3z, -z) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}$$

- (a) Zeige, dass α ein Vektorraumhomomorphismus ist!
- (b) Bestimme $\text{Kern}(\alpha)$! Welche Dimension hat $\text{Kern}(\alpha)$?

5. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, wobei für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt: $f(x, y, z) = (-2x + y, y^2)$.
- (a) Gib das Bild von $(1, -3, 2)$ an!
 - (b) Gib die vollständige Urbildmenge von $(0, 4)$ an und die von $(0, -1)$!
 - (c) Ist f surjektiv? Ist f injektiv? Ist f ein Vektorraumhomomorphismus? Beweise oder widerlege!
6. Entscheide, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen bzw. Vektorraumhomomorphismen, injektiv oder surjektiv sind! Bestimme bei den Vektorraumhomomorphismen jeweils den Kern!
- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(z) = (0, -z)$
 - (b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $g(z) = (z, z^2)$
 - (c) $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $h(z) = (z, z + 1)$
 - (d) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p((z_1, z_2)) = z_1$



Gruppen

1. Seien (G, \circ) eine Gruppe und $x, y, z \in G$.
Zeige die folgenden Eigenschaften:
 - i) $(x^{-1})^{-1} = x$.
 - ii) $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.
 - iii) Aus $x \circ y = x \circ z$ folgt $y = z$.
 - iv) Seien U eine Untergruppe von G und $u \in U, g \in G \setminus U$. Zeige, dass dann auch $u \circ g \in G \setminus U$ gelten muss.

2. Sei (G, \circ) eine Gruppe. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe oder widerlege deine Behauptung!
 - i) Es existiert ein $g \in G$ so, dass $g \circ g = g$ ist.
 - ii) Wenn es Elemente $g, h \in G$ gibt so, dass $g \circ h = h \circ g$ gilt, dann ist G abelsch.
 - iii) Für alle $g, h \in G$ gelte $(g \circ h)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$. Dann ist G abelsch.
 - iv) Es existiert eine Gruppe (F, \cdot) so, dass F zwei neutrale Elemente besitzt.

3. Sei (G, \circ) eine Gruppe mit dem neutralen Element e und der Eigenschaft:
Für alle $g \in G$ gilt $g \circ g = e$.

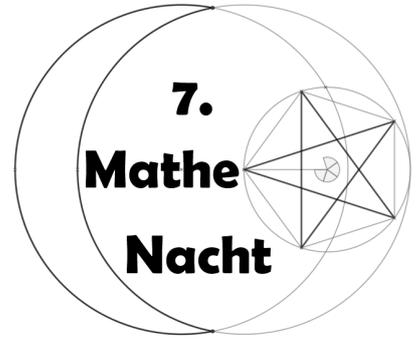
Zeige, dass G abelsch ist.

4. Eine Permutation auf einer Menge ist eine bijektive Abbildung der Menge in sich selbst. Seien A eine endliche Menge und P die Menge aller Permutationen auf der Menge A . Es bezeichne $*$ die Komposition von Abbildungen.

Zeige, dass $(P, *)$ eine Gruppe ist.

5. Seien $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und \oplus wie folgt definiert:

Für alle $(a, b), (c, d) \in G$ sei $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$ (komponentenweise Addition).
 - i) Zeige, dass (G, \oplus) eine Gruppe ist.
 - ii) Sei $U := \{(a, b) \in G \mid a \text{ ist gerade}\}$. Ist (U, \oplus) eine Untergruppe von (G, \oplus) ?
 - iii) Ist $G \setminus \{(0, 0)\}$ mit komponentenweiser Multiplikation eine Gruppe?



Vektorräume I (Unterräume)

1. Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = c \}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 ist.

2. Untersuche, welche der folgenden vier Mengen Untervektorräume von \mathbb{R}^2 sind und beweise oder widerlege deine Behauptung!

(a) $U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

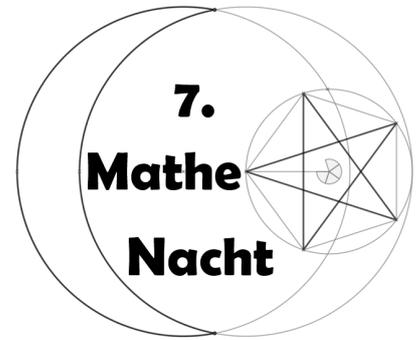
(b) $U_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \}$

(c) $U_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$

(d) $U_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \}$

3. Gegeben sei der Vektorraum $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über dem Körper \mathbb{R} . Zeige, dass $U := \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \}$ ein Untervektorraum von V ist.
4. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V . Man zeige: Wenn auch die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V ist, dann gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Vektorräume II (Basis und Dimension)



1. (a) Zeige, dass die Menge

$$M := \{(1, 1, 1), (0, -1, 2), (-2, 0, 4)\}$$

eine Basis für \mathbb{R}^3 bildet.

- (b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(-2x, -1, x), (8, x, -4)$ linear unabhängig sind!

2. Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Ist die Menge $\{x^2, x^4 + x^2\}$ linear unabhängig?

- (b) Gib eine Basis für den Untervektorraum $U := \{f \in V \mid \text{Grad}(f) \leq 6\}$ an!
Welche Dimension hat U ?

3. Es sei $A := \{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (2, -1, 0, 3), (5, -2, 0, 7)\}$.

- (a) Zeige, dass $(2, -9, 0, 11)$ in $\text{span}(A)$ liegt! Gib einen Vektor an, der nicht in $\text{span}(A)$ liegt!

- (b) Gib ein Erzeugendensystem für $\text{span}(A)$ an!

- (c) Gib eine Basis von $\text{span}(A)$ an und beweise, dass es sich um eine Basis handelt!

- (d) Welche Dimension hat $\text{span}(A)$?

- (e) Ersetze das Fragezeichen!

$$\text{span}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid ? \}$$

4. Gegeben seien die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^3 :

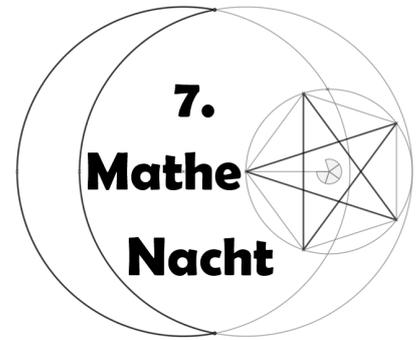
$$U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ und } U_2 := \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Gib eine Basis B_1 von U_1 und eine Basis B_2 von U_2 an!

- (b) Gib eine Basis C von \mathbb{R}^3 an, die B_1 enthält!

- (c) Gib eine Basis von $U_1 \cap U_2$ an!

- (d) Bestimme $U_1 + U_2$!



Definitionen und Beweise

1. Abbildungen

- (a) Definiere drei der folgenden Begriffe!

Bild, Urbild, injektiv, surjektiv

- (b) Gegeben sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = x^2$. Gib für X und Y Mengen an so, dass

- f injektiv, aber nicht surjektiv ist
- f surjektiv, aber nicht injektiv ist
- f bijektiv ist
- $f \equiv id_X$

2. Gruppen

- (a) Definiere drei der folgenden Begriffe/Begriffspaare!

Halbgruppe & Gruppe, Untergruppe, Gruppen-Homomorphismus, Kern & Bild

- (b) Seien $(G, *)$ und (H, \bullet) Gruppen mit den neutralen Elementen e_G und e_H und $\varphi : (G, *) \rightarrow (H, \bullet)$, $\alpha : (H, \bullet) \rightarrow (G, *)$ Gruppen-Homomorphismen. Beweise:

- $\forall g \in G \forall a \in \text{Kern}(\varphi) : g^{-1} * a * g \in \text{Kern}(\varphi)$
- Die Komposition $\alpha \circ \varphi : G \rightarrow G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- Es gilt $\varphi(e_G) = e_H$, $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \forall g \in G$

3. Ringe, Körper, Vektorräume

- (a) Definiere folgende Begriffe! (Die Begriffe „Halbgruppe“ und abelsche Gruppe dürfen dabei ohne Definition verwendet werden.)

Ring, Körper, Vektorraum, Unterraum, Körperhomomorphismus

- (b) Definiere jeden Begriff unter Verwendung des vorherigen:

Linearkombination, Erzeugendensystem, Basis, Dimension

(c) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort!

- i. Je n paarweise verschiedene Vektoren aus \mathbb{R}^n bilden eine Basis des \mathbb{R}^n .
- ii. Es gibt zwei verschiedene Vektorräume über dem selben Körper mit der gleichen Basis.
- iii. Es gibt keine Basis, die die Null des Vektorraumes enthält.
- iv. Der Nullraum hat keine Basis und ist der einzige Vektorraum ohne Basis.
- v. Jeder Vektorraum hat unendlich viele verschiedene Basen.
- vi. Jeder Körper ist ein Ring.
- vii. Jeder Ring ist ein Körper.
- viii. Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.

(d) Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper K . Weiter seien U und W Unterräume von V und es sei $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subset V$. Zeige:

- i. Falls $A \setminus \{a_n\}$ linear abhängig ist, so auch A . Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?
- ii. Falls A linear unabhängig ist, so auch $A \setminus \{a_n\}$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

(e) Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$ der reellen bzw. rationalen Polynome.

- i. Finde für eine beliebige Zahl $k \in \mathbb{N}$ Unterräume U_1, U_2, \dots, U_k von $\mathbb{Q}[x]$ so, dass für $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j$ gilt:

$$U_i \cap U_j = \{0\} \text{ und } U_1 + U_2 + \dots + U_k = \mathbb{Q}[x]$$

Kann mehr als einer dieser Unterräume unendliche Dimension haben?
(ohne Begründung)

Können alle diese Unterräume endliche Dimension haben? (ohne Begründung)

- ii. Finde unendlich viele Unterräume von $\mathbb{R}[x]$, deren Dimension unendlich ist.